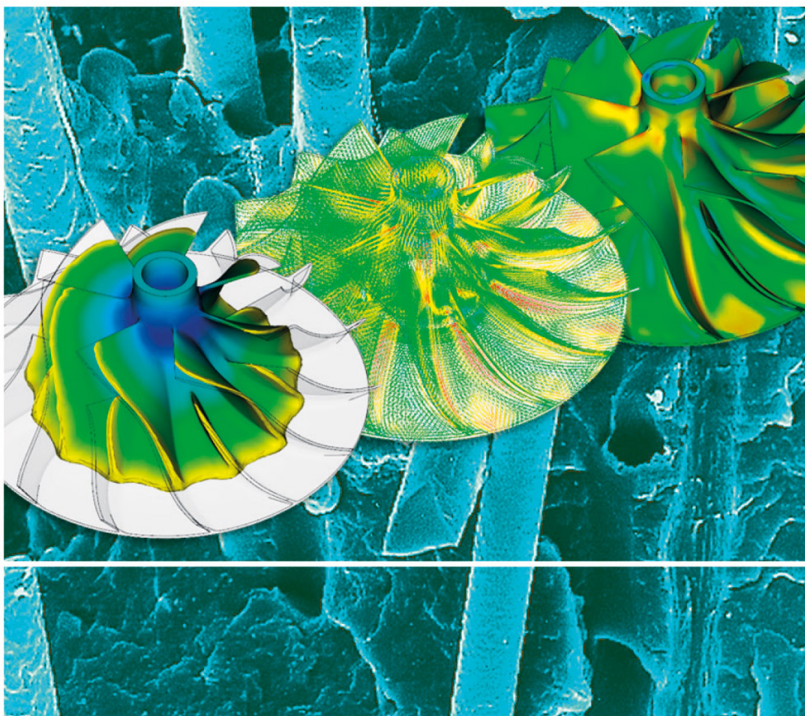


Markus Stommel  
Marcus Stojek  
Wolfgang Korte

# FEM zur Berechnung von Kunststoff- und Elastomerbauteilen



3., überarbeitete Auflage

HANSER

### **Disclaimer zur Barrierefreiheit**

Der Carl Hanser Verlag unternimmt große Anstrengungen, um seine Produkte barrierefrei zu machen. Dazu gehört auch, dass Bilder oder Tabellen für blinde und sehbehinderte Menschen zugänglich gemacht werden. Dies geschieht durch zusätzliche beschreibende Texte (Alternativtexte), die in den Daten integriert sind. Die Alternativtexte können von assistiven Technologien (z. B. Screenreadern) vorgelesen werden. Bei der Erstellung dieser Texte kommt eine KI zum Einsatz. Die inhaltliche Verantwortung liegt weiterhin bei den Lektor:innen und Autor:innen.

Markus Stommel  
Marcus Stojek  
Wolfgang Korte

# **FEM zur Berechnung von Kunststoff- und Elastomerbauteilen**

3., überarbeitete Auflage

HANSER



Print-ISBN: 978-3-446-47568-7

E-Book-ISBN: 978-3-446-48480-1

Die allgemein verwendeten Personenbezeichnungen gelten gleichermaßen für alle Geschlechter.

Alle in diesem Werk enthaltenen Informationen, Verfahren und Darstellungen wurden zum Zeitpunkt der Veröffentlichung nach bestem Wissen zusammengestellt. Dennoch sind Fehler nicht ganz auszuschließen. Aus diesem Grund sind die im vorliegenden Werk enthaltenen Informationen für Autor:innen, Herausgeber:innen und Verlag mit keiner Verpflichtung oder Garantie irgendeiner Art verbunden. Autor:innen, Herausgeber:innen und Verlag übernehmen infolgedessen keine Verantwortung und werden keine daraus folgende oder sonstige Haftung übernehmen, die auf irgendeine Weise aus der Benutzung dieser Informationen – oder Teilen davon – entsteht. Ebenso wenig übernehmen Autor:innen, Herausgeber:innen und Verlag die Gewähr dafür, dass die beschriebenen Verfahren usw. frei von Schutzrechten Dritter sind. Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt also auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Die endgültige Entscheidung über die Eignung der Informationen für die vorgesehene Verwendung in einer bestimmten Anwendung liegt in der alleinigen Verantwortung des Nutzers.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet unter <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.

Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdruckes und der Vervielfältigung des Werkes, oder Teilen daraus, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Einwilligung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder einem anderen Verfahren), auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung – mit Ausnahme der in den §§ 53, 54 UrhG genannten Sonderfälle –, reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

Wir behalten uns auch eine Nutzung des Werks für Zwecke des Text und Data Mining nach § 44b UrhG ausdrücklich vor.

© 2025 Carl Hanser Verlag GmbH & Co. KG, München

Vilshofener Straße 10 | 81679 München | [info@hanser.de](mailto:info@hanser.de)

[www.hanser-fachbuch.de](http://www.hanser-fachbuch.de)

Lektorat: Dr. Mark Smith

Herstellung: Cornelia Speckmaier

Coverkonzept: Marc Müller-Bremer, [www.rebranding.de](http://www.rebranding.de), München

Covergestaltung: Max Kostopoulos

Titelmotiv: © MANN+HUMMEL GmbH

Satz: Eberl & Koesel Studio, Kempten

Druck: Elanders Waiblingen GmbH, Waiblingen

Printed in Germany

# Inhalt

<b>Vorwort</b> .....	<b>VII</b>
<b>Die Autoren</b> .....	<b>XI</b>
<b>1 Einleitung und Übersicht</b> .....	<b>1</b>
<b>TEIL A: Werkstoffverhalten, Materialmodellierung und Bewertung</b> .....	<b>5</b>
<b>2 Mechanisches Werkstoffverhalten und -modellierung</b> .....	<b>7</b>
2.1 Grundbegriffe der Mechanik .....	7
2.2 Charakteristische mechanische Werkstoffeigenschaften .....	30
2.2.1 Thermoplaste .....	31
2.2.2 Kurzfaserverstärkte Thermoplaste .....	41
2.2.3 Elastomere .....	43
2.2.4 Duroplaste .....	46
2.2.5 Zeit-Temperatur-Verschiebungsprinzip .....	47
2.3 Modellierung des Werkstoffverhaltens .....	51
2.3.1 Thermoplaste .....	52
2.3.1.1 Materialmodelle für Kurzzeit-Belastung .....	53
2.3.1.2 Materialmodelle für Langzeit-Belastung .....	60
2.3.1.3 Materialmodelle für dynamische Belastung .....	71
2.3.2 Kurzfaserverstärkte Thermoplaste .....	72
2.3.2.1 Grundlagen zur Mikromechanik .....	74
2.3.2.2 Elastische Materialmodelle .....	81

2.3.3	Elastomere und TPE .....	92
2.3.3.1	Materialmodelle für Kurzzeit-Belastung .....	92
2.3.3.2	Materialmodelle für langzeitige und dynamische Belastung .....	96
2.3.3.3	Materialmodelle für die Kompressibilität .....	97
2.3.4	Duroplaste .....	100
2.4	Bestimmung von Materialparametern .....	103
2.4.1	Elastische Materialmodelle .....	104
2.4.2	Hyperelastische Materialmodelle .....	114
2.4.3	Elasto-plastische Materialmodelle .....	124
2.4.4	Kriechmodelle .....	131
2.4.5	Viskoelastische Materialmodelle .....	138
<b>3</b>	<b>Dimensionierung von thermoplastischen Kunststoffbauteilen .....</b>	<b>149</b>
3.1	Statische Festigkeit .....	152
3.1.1	Werkstoffmechanik des Versagens von Thermoplasten .....	153
3.1.2	Ermittlung von statischen Festigkeitskennwerten .....	158
3.1.2.1	Statische kurzzeitige Beanspruchungen .....	158
3.1.2.2	Statische langzeitige Beanspruchungen .....	160
3.1.2.3	Stoßartige Beanspruchungen .....	166
3.1.3	Bewertung mehraxialer Beanspruchungen und Versagen .....	169
3.1.3.1	Spannungsbezogene Versagenshypothesen .....	174
3.1.3.2	Dehnungsbezogene Versagenshypothesen .....	179
3.1.4	Einflussfaktoren auf die Bauteilfestigkeit .....	182
3.1.4.1	Phänomenologisches Verhalten beim Versagen des Werkstoffs .....	184
3.1.4.2	Einfluss von Beanspruchungsgeschwindigkeit, Temperatur und Feuchte .....	185
3.1.4.3	Einfluss von Bauteilkonstruktion und Lastsituation .....	186
3.1.4.4	Einfluss der Fertigung .....	188
3.1.5	Ansätze zur Bemessung thermoplastischer Kunststoffbauteile .....	194
3.1.5.1	Bemessung gegen eine zulässige Dehnung .....	194
3.1.5.2	Bemessung gegen eine zulässige Spannung .....	196
3.1.5.3	Bemessung auf Basis von Spannungs-/Dehnungs-Kurven ..	199
3.1.5.4	Bemessung gegen eine zulässige spezifische Arbeitsaufnahme .....	203

3.1.5.5	Bemessung gegen eine zulässige plastische Vergleichsdehnung . . . . .	204
3.1.5.6	Bemessung nach VDI-Richtlinie 2016 . . . . .	204
3.1.6	Vergleich der Bemessungsansätze. . . . .	207
3.1.6.1	Spannungs- und dehnungsbasierte Vorgehensweise . . . . .	207
3.1.6.2	Bemessungsgrenze und Bauteil-Beanspruchung . . . . .	210
3.2	Ermüdungsfestigkeit . . . . .	213
3.2.1	Ermittlung von zyklischen Festigkeitskennwerten. . . . .	215
3.2.2	Konstruktions- und fertigungsbedingte Einflüsse auf die Ermüdungsfestigkeit. . . . .	223
3.2.2.1	Einfluss des Spannungsgradienten auf die Ermüdungsfestigkeit . . . . .	224
3.3	Dimensionierung kurzfaserverstärkter Thermoplaste . . . . .	229
3.3.1	Verhalten beim Versagen von kurzfaserverstärkten Thermoplasten . . . . .	231
3.3.2	Ermittlung von Dimensionierungskennwerten für kurzfaserverstärkte Thermoplaste . . . . .	233
3.3.3	Versagenshypothesen für kurzfaserverstärkte Kunststoffe . . . . .	237
3.3.4	Ermüdungsfestigkeit kurzfaserverstärkter Kunststoffe. . . . .	245
3.3.4.1	Ermittlung von zyklischen Festigkeitskennwerten . . . . .	246
3.3.4.2	Master-Wöhlerkurven-Konzept . . . . .	247
3.3.4.3	Interpolation von Wöhlerkurven. . . . .	248
3.3.4.4	Wöhlerkurven-Ermittlung auf Basis mikromechanischer Ansätze . . . . .	249
3.3.4.5	Lokales Wöhlerkurven-Konzept. . . . .	251
3.4	Streuungen . . . . .	254
<b>4</b>	<b>Dimensionierung von Elastomerbauteilen . . . . .</b>	<b>263</b>
4.1	Abschätzung der Belastbarkeit mittels Formänderungsenergiedichte und Formänderungsbetrag. . . . .	265
4.2	Praktische Auslegungsregeln . . . . .	266
4.3	Auswertung von FEM-Ergebnissen bei großen Deformationen . . . . .	268
4.4	Methode der „Crack-Energy-Density“ (CED). . . . .	270
<b>5</b>	<b>Prozesssimulation und Prozess-Struktur-Kopplung. . . . .</b>	<b>275</b>
5.1	Der Spritzgießprozess . . . . .	276
5.2	Beschreibung von Strömungsvorgängen . . . . .	280
5.2.1	Berechnung der Faserorientierungen . . . . .	290

5.3	Modellierungsansätze für die Prozesssimulation.....	295
5.4	Prozess-Struktur-Kopplung.....	300
5.4.1	Ergebnisse für die Struktursimulation.....	303

## **TEIL B: Vorschlag für einen vereinfachten Festigkeitsnachweis .... 315**

### **6 Vereinfachte Vorgehensweise zum Festigkeitsnachweis thermoplastischer Kunststoffbauteile ..... 317**

6.1	Verwendete Konzepte beim vereinfachten Festigkeitsnachweis .....	318
6.1.1	Ermittlung der Bemessungsgrenze.....	319
6.1.2	Bauteilfestigkeit, Auslastungsgrad und Tragfähigkeit .....	320
6.1.2.1	Konzept der lokalen Bauteilfestigkeit .....	320
6.1.2.2	Auslastungsgrad .....	321
6.1.2.3	Bauteiltragfähigkeit.....	326
6.1.3	Versagenshypothese und Mehraxialität bei statischer Beanspruchung .....	331
6.1.4	Grenzspannungsamplitude und Näherungskonstruktion des Haigh-Diagramms .....	337
6.1.5	Mehraxialität bei zyklischer Beanspruchung.....	340
6.1.5.1	Proportionale und nichtproportionale Beanspruchungen ..	340
6.1.5.2	Vergleichsspannungshypothesen für zyklische Beanspruchung.....	342
6.1.5.3	Kritisches Schnittebenenverfahren.....	349
6.1.6	Kerbspannungskorrektur-Verfahren .....	351
6.2	Vorschlag für einen vereinfachten statischen Festigkeitsnachweis .....	353
6.2.1	Ermittlung der Spannungskennwerte .....	354
6.2.2	Ermittlung der lokalen Bauteilfestigkeit bei kurzzeitiger Beanspruchung .....	354
6.2.2.1	Erfassung des Temperatureinflusses auf die Bauteilfestigkeit .....	359
6.2.3	Ermittlung der lokalen Bauteilfestigkeit bei langzeitiger Beanspruchung .....	362
6.2.4	Ermittlung des statischen Auslastungsgrads .....	365
6.2.5	Tragfähigkeitsnachweis.....	369
6.3	Vorschlag für einen vereinfachten Ermüdungsfestigkeitsnachweis .....	369
6.3.1	Ermittlung der Spannungskennwerte .....	372
6.3.2	Nachweis gegen die Grenzspannungsamplitude.....	372

6.3.3	Erfassung des Mittelspannungseinflusses.....	374
6.3.4	Nachweis gegen eine Zeitfestigkeit.....	379
6.3.5	Ermittlung des zyklischen Auslastungsgrads.....	383
<b>TEIL C: Einführung in die FEM.....</b>		<b>389</b>
<b>7</b>	<b>Prinzip der FEM.....</b>	<b>391</b>
7.1	Grundlegende Vorgehensweise.....	393
7.2	Systemgleichungen und Gleichungslösung.....	401
7.3	Formfunktionen.....	410
7.4	Integrationspunkte.....	418
7.5	Nichtlineare Problemstellungen.....	421
7.6	Implizite und explizite Solver.....	427
7.7	Elementtypen.....	430
7.7.1	Elementeigenschaften.....	430
7.7.2	Kontinuumselemente.....	438
7.7.3	Strukturelemente.....	440
7.7.4	Sonstige Elemente.....	444
7.8	Schwingungssimulation.....	446
7.8.1	Lösung von Schwingungsproblemen in der FEM.....	447
7.8.2	Definition des FE-Modells.....	450
7.8.3	Ergebnisse von Schwingungssimulationen.....	454
<b>8</b>	<b>FEM im Entwicklungsprozess.....</b>	<b>461</b>
8.1	Planung.....	462
8.1.1	Ergebnisdefinition.....	463
8.1.2	Eingangsdaten, Datenquellen.....	466
8.2	Modellerstellung.....	467
8.2.1	Modellierungskonzept.....	468
8.2.2	Vernetzung.....	471
8.2.3	Randbedingungen.....	477
8.2.3.1	Kontaktprobleme.....	480
8.3	Lösungsverfahren.....	483
8.3.1	Lineare und nicht-lineare Probleme.....	483
8.3.2	Implizite und explizite Solver.....	484
8.4	Validierung.....	485

8.5	Auswertung und Dokumentation .....	488
8.5.1	Formale Anforderungen an einen Bericht .....	492
8.5.2	Prozesssicherheit.....	493
<b>Index</b>	.....	<b>495</b>

# Vorwort

## 3. Auflage

Seit der 1. Auflage des Buchs im Jahr 2011 sind mehr als 14 Jahre vergangen und mit Freude stellen die Autoren fest, dass es in dieser Zeit im deutschsprachigen Raum große Verbreitung innerhalb der interessierten Community gefunden hat. Die 2. Auflage aus dem Jahr 2018 ist nahezu vergriffen und hat eine Neuauflage erforderlich gemacht. Mit der vorliegenden 3. Auflage wird die Gelegenheit ergriffen einige neuere Entwicklungen einzupflegen und Fehler zu beseitigen. In einigen Bereichen wurden Klarstellungen durchgeführt, die zum besseren Verständnis der Zusammenhänge beitragen sollen. Bis auf einige Umstellungen innerhalb einzelner Kapitel, bleibt der Aufbau des Buches als solcher bestehen.

Ergänzt wurden einige Aspekte im Bereich der Multiskalensimulation, insbesondere im Hinblick auf die Rekonstruktion der Faserorientierungsverteilung aus dem Orientierungstensor sowie eine alternative Homogenisierungsmethode. Erweiterte Hinweise für eine abschätzende Ermittlung von Bindenahtfestigkeiten sollten für den Praktiker ebenfalls von Interesse sein. Eine wichtige Neuigkeit im Bereich der Festigkeitsbewertung thermoplastischer Kunststoffe ist sicherlich, dass nun mit der VDI-Richtlinie 2016 „Festigkeitsnachweis von Bauteilen aus thermoplastischen Kunststoffen“ erstmalig ein entsprechendes Regelwerk vorliegt, zum Zeitpunkt der Abfassung dieser 3. Auflage allerdings noch als Entwurf. Aus diesem Grunde und auch weil die Richtlinie zurzeit noch keine breitere Anwendung in der Praxis erfahren hat, wird die Richtlinie zwar hinsichtlich ihrer Struktur vorgestellt, auf inhaltliche Verfahren wird aber nur am Rande eingegangen. Hierzu sollte der Interessierte die Richtlinie selber zu Rate ziehen. Der bereits in der 2. Auflage von den Autoren gemachte Vorschlag eines vereinfachten Festigkeitsnachweises ist weiterhin Bestandteil des Buches, auch weil dieser sich schon ein Stück weit in der Praxis etabliert hat und insofern eine alternative Vorgehensweise darstellt. Darüber hinaus ermöglicht er neben dem rein statischen Nachweis auch einen vereinfachten Ermüdungsfestigkeitsnachweis.

Im Bereich der technischen Simulation ist sicherlich in den vergangenen Jahren die Anwendung der Künstlichen Intelligenz (KI) in den Fokus gerückt. Die Autoren haben sich bewusst dafür entschieden diesen Aspekt in die vorliegende Auflage nicht aufzunehmen. Hier bleibt abzuwarten, wie sich dieser Bereich entwickelt und welche Vorteile die KI-Verfahren dem Praktiker zukünftig bieten.

Es gilt weiterhin unverändert die Maßgabe, dass dem Leser mit dem Buch ein praktisches Nachschlagewerk an die Hand gegeben wird. Auf theoretische Darlegungen wird zugunsten von praktischen Vorgehensweisen so weit wie möglich verzichtet. Der Leser soll in die Lage versetzt werden, Probleme aus der Praxis eigenständig, methodisch nachvollziehbar und werkstoffgerecht zu lösen.

Der Dank der Autoren gilt auch in der 3. Auflage denen, die zum Buch beigetragen haben mit Bauteil- und Bilddaten, Unterlagen, Hinweisen, Zeichenarbeiten und Lesen der Korrekturen.

Bergisch Gladbach/Dresden, im Juli 2025

*Marcus Stojek*

*Markus Stommel*

*Wolfgang Korte*

## **2. Auflage**

Die Autoren freuen sich über die äußerst positive Aufnahme der 1. Auflage des vorliegenden Buchs, das im Jahr 2011 in dieser Form erstmalig veröffentlicht wurde. Da nun diese 1. Auflage nahezu vergriffen ist und auch viele neue Erkenntnisse innerhalb den behandelten Themengebieten gesammelt wurden, ist eine neue Auflage erforderlich geworden.

Der Bereich der sogenannten integrativen Simulation, also der Kopplung von Prozesssimulation und nachfolgender Struktursimulation hat in den vergangenen Jahren einen deutlichen Aufschwung erlebt. Dies gilt sowohl hinsichtlich neuer wissenschaftlicher Erkenntnisse, softwaretechnischer Möglichkeiten, als auch im Hinblick auf die öffentliche Wahrnehmung der Bedeutung dieser Thematik. Folglich ist der Bereich der Materialmodellierung und Festigkeitsbewertung spritzgegossener kurzfaserverstärkter Bauteile in dieser Auflage erweitert und auf den aktuellen Stand der Technik gebracht worden. Es wurden hierbei insbesondere auch neue Ansätze der Mikromechanik zur Beschreibung dieser Werkstoffe im elastischen und elasto-plastischen Bereich ergänzt und ein Abschnitt zur Spritzgießsimulation im Hinblick auf die zur Ausbildung der Mikrostruktur verantwortlichen Strömungsvorgänge ergänzt. Des Weiteren wird detaillierter dargestellt, wie eine Kopplung von Spritzgießsimulation und Struktursimulation methodisch erfolgen kann.

Eine umfassende Überarbeitung und Ergänzung hat das Kapitel der Dimensionierung bzw. der Festigkeitsbewertung von thermoplastischen Kunststoffen erfahren. Die Wahrnehmung der Autoren ist, dass es hierzu sowohl in der Theorie als auch in der Praxis einer eindeutigen Vorgehensweise ermangelt. Eine allgemeingültige Richtlinie

zur Festigkeitsbewertung von Kunststoffen ist bislang nicht veröffentlicht. Vor diesem Hintergrund machen die Autoren aus der eigenen praktischen Erfahrung heraus einen Vorschlag, wie in der Praxis ein Festigkeitsnachweis von thermoplastischen Bauteilen erfolgen kann. Es wird eine strukturierte Vorgehensweise im Sinne einer „best practice“ vorgestellt. Diese umfasst sowohl den statischen Festigkeitsnachweis, als auch den Ermüdungsfestigkeitsnachweis. Da in der Praxis vielfach sinnvolle Bemessungsgrenzen für die unterschiedlichen Beanspruchungssituationen und Werkstoffklassen fehlen, liegt ein Augenmerk hierbei auch auf dem Bereich der Abschätzung von Bemessungsgrenzen. Dies gilt sowohl für statische als auch für zyklische Festigkeitskennwerte. Ebenso werden die in der Praxis zur Anwendung kommenden Dimensionierungsmethoden vorgestellt und hinsichtlich der ihnen zugrundeliegenden Konzepte eingeordnet. Im Bereich der Dimensionierung von Elastomeren, womit vornehmlich die Betriebsfestigkeitsbewertung gemeint ist, wurden ebenfalls neuere Ansätze ergänzt.

Der Charakter des Buches, dem Leser ein praktisches Nachschlagewerk an die Hand zu geben, ist zur 1. Auflage unverändert. Auf theoretische Darlegungen wird zugunsten von praktischen Vorgehensweisen soweit wie möglich verzichtet. Der Leser soll in die Lage versetzt werden, Probleme aus der Praxis eigenständig, methodisch nachvollziehbar und werkstoffgerecht zu lösen.

Der Dank der Autoren gilt auch in der 2. Auflage denen, die zum Buch beigetragen haben mit Bauteil- und Bilddaten, Unterlagen, Hinweisen, Zeichenarbeiten und Lesen der Korrekturen.

Bergisch Gladbach/Dortmund, im August 2017

*Marcus Stojek*  
*Markus Stommel*  
*Wolfgang Korte*

## **1. Auflage**

Die Idee für dieses Buch geht zurück auf das Jahr 1998, als eine erste Veröffentlichung der Autoren unter ähnlichem Titel in Form einer temporär verfügbaren Sonderpublikation erschien. Damals waren die Autoren noch Mitarbeiter des Instituts für Kunststoffverarbeitung an der RWTH Aachen, das unter der Leitung von Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E. h. Walter Michaeli auch die Herausgeberschaft übernahm. Danach war für viele Jahre eine elektronische Version des Buches im Internet frei verfügbar.

Die Rückmeldungen der Leser auf diese erste Publikation haben die Autoren ermutigt, nach nunmehr über zehn Jahren zu gleicher Thematik ein neues Buch in erheblich verbesserter Ausstattung zu veröffentlichen. Dabei kann das nun vorliegende Werk nur in dem Sinne als Neuauflage verstanden werden, dass die Thematik die gleiche geblieben ist. Die Entwicklungen im Bereich der FEM, neue wissenschaftliche Erkenntnisse im Bereich der Werkstoffmechanik der Kunststoffe und Elastomere und eigene Erfahrungen der Autoren haben eine umfassende inhaltliche Neuausrichtung

und Erweiterung erforderlich gemacht. Die Grundidee ist jedoch geblieben, nämlich dem Praktiker ein verständliches Buch an die Hand zu geben, das versucht, komplexe Zusammenhänge in verständlicher Sprache darzustellen. Hierbei wird zugunsten der Darstellung der Gesamthematik auf eine umfassende Erläuterung theoretischer Hintergründe bei einzelnen Thematiken verzichtet. Das Buch beschränkt sich hier bewusst nach dem Grundsatz: So einfach wie möglich, so komplex wie nötig. Dem Praktiker sollen Konzepte vorgestellt werden, die er mit dem ihm zur Verfügung stehenden „Bordmitteln“ anwenden kann. Nicht die Darstellung des wissenschaftlich Wünschenswerten oder des technisch Möglichen war für die Autoren hierbei der Maßstab, sondern das, was unter Berücksichtigung der Verfügbarkeit der Mittel in Form von Geld, Zeit, Soft- und Hardware und letztendlich auch Qualifikation im jeweiligen betrieblichen Umfeld umsetzbar ist. Die Autoren sind sich bewusst, dass hierbei die Gefahr des übermäßigen Simplifizierens besteht. Aus wissenschaftlicher Sicht werden manche Zusammenhänge sicherlich nicht erschöpfend behandelt, und manche Daumenregeln entstammen eher der praktischen Erfahrung und weniger aus Theorien. Hier gilt dann das Zitat: „Alle Modelle sind falsch, aber manche sind nützlich.“ (George E. P. Box, Statistiker). Auf der anderen Seite gilt auch: „Nichts ist so praktisch wie eine gute Theorie.“ (Kurt Lewin, Psychologe). In diesem Sinne wurde – wo immer es zum Verständnis sinnvoll erschien – erläutert, aus welchen theoretischen Modellvorstellungen sich die dargestellten Vorgehensweisen ableiten.

Das Buch richtet sich gleichermaßen an den operativ tätigen Berechnungsingenieur, den Konstrukteur, der konstruktionsbegleitend Simulationen durchführt, den CAE-Manager und alle, die das mechanische Verhalten von Kunststoff- und Elastomerbauteilen bewerten müssen. Das Buch richtet sich dementsprechend nicht primär an den Werkstoffwissenschaftler, der sich über den neuesten Stand der Forschung in seinem Spezialgebiet informieren möchte.

Gemäß dem Anspruch des Buches, ein praktisches Handbuch zu sein und nicht die Ergebnisse eigener wissenschaftlicher Untersuchungen darzustellen, wurden aus einer Vielzahl von Quellen Erkenntnisse zusammengetragen. Häufig ist es dabei schwierig, den originären Autor einer Idee ausfindig zu machen bzw. jede einzelne Quelle im Nachhinein zu rekonstruieren. Sollten also in dem ein oder anderen Fall die Urheber der dargestellten Ansätze nicht oder unzureichend zitiert worden sein, so erheben die Autoren schon jetzt nicht den Anspruch darauf, sich diese zu eigen zu machen. Die wichtigsten Quellen sind jeweils am Ende der Kapitel aufgeführt.

Der Dank der Autoren gebührt vor allem denen, die zum Buch beigetragen haben mit Bauteil- und Bilddaten, Unterlagen, Hinweisen, Zeichenarbeiten und Lesen der Korrekturen.

Bergisch Gladbach/Saarbrücken, im Mai 2011

*Marcus Stojek*  
*Markus Stommel*  
*Wolfgang Korte*

# Die Autoren

## Prof. Dr.-Ing. Markus Stommel



Prof. Dr.-Ing. Markus Stommel wurde 1968 in Aachen geboren. Er absolvierte sein Studium zum Diplom-Ingenieur für Maschinenbau an der RWTH Aachen mit der Vertiefung in Kunststofftechnik. Im Anschluss war er wissenschaftlicher Mitarbeiter und später Abteilungsleiter am Institut für Kunststoffverarbeitung (IKV) an der RWTH Aachen unter der Leitung von Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. e. h. W. Michaeli. Er promovierte in dieser Zeit an der Fakultät für Maschinenwesen der RWTH Aachen. 1999 gründete er mit den beiden Mitautoren die *PART Engineering GmbH*. Das Ingenieurunternehmen beschäftigt sich mit der technischen Simulation

und der Entwicklung von Software. 2006 übernahm er die Professur „Konstruktion und Kunststofftechnik“ an der HAW Hamburg und leitete dort das kunststofftechnische Laboratorium. 2007 nahm Prof. Markus Stommel den Ruf auf den Lehrstuhl für Polymerwerkstoffe an der Universität des Saarlandes in Saarbrücken an. Nach seinem Wechsel an die TU Dortmund, leitet er dort seit April 2014 den Lehrstuhl für Kunststofftechnologie an der Fakultät für Maschinenbau. Seine Forschungsschwerpunkte liegen im Bereich der Konstruktion und Verarbeitung von Kunststoffbauteilen sowie Kunststoff-Verbundbauteilen. Weitere Forschungsaktivitäten beschäftigen sich mit der Entwicklung von Prüf- und Simulationsmethoden für Kunststoffe, insbesondere kurz- und endlosfaserverstärkte Kunststoffe.

### Dr. Marcus Stojek



Dr. Marcus Stojek ist 1965 in Köln geboren. Er studierte Maschinenbau an der RWTH Aachen und wählte als Fachrichtung die Kunststoffverarbeitung. Nach dem Studium promovierte er am Institut für Kunststoffverarbeitung unter Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. e. h. W. Michaeli zum Thema der automatischen Optimierung von Kunststoffbauteilen. Er ist einer der Gründer und Gesellschafter der *PART Engineering GmbH* und dort bis heute als Geschäftsführer tätig. Er betreut die Struktursimulation im gesamten Anwendungsspektrum von polymeren Werkstoffen und beschäftigt sich mit der kontinuierlichen Weiterentwicklung von Berechnungs- und Bewertungsmethoden in diesem Umfeld. Aus dieser Tätigkeit entstand unter anderem die Software *Converse* als eines der ersten Werkzeuge zur Berücksichtigung von Faserorientierungen in der Struktursimulation.

Er leitet Seminare und In-house Schulungen im Umfeld der technischen Berechnung von Kunststoffbauteilen und ist Mitglied einer Reihe von projektbegleitenden Ausschüssen unterschiedlicher Forschungsvorhaben.

### Dr. Wolfgang Korte



Dr. Wolfgang Korte wurde 1965 in Köln geboren und hat an der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule in Aachen Maschinenbau mit Fachrichtung Kunststofftechnik studiert. Nach seiner Promotion 1996 bei Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. e. h. W. Michaeli, leitete er am Institut für Kunststoffverarbeitung die Abteilung Formteileauslegung und Werkstofftechnik. Im Jahr 1999, nach seiner akademischen Tätigkeit, gründete er gemeinsam mit den Mitautoren dieses Buchs das Ingenieurunternehmen *PART Engineering GmbH* in Bergisch Gladbach. Neben der Geschäftsführung des Unternehmens beschäftigt er sich seitdem mit Fragestellungen der technischen Simulation sowie der Entwicklung von Software in diesem Bereich. Die FEM-Analyse und Bewertung von Kunststoff- und Elastomerbauteilen gehört dabei zu seiner Expertise.

Er ist Referent bei zahlreichen Vortragsveranstaltungen, Leiter von Fortbildungseminaren und pflegt weiterhin einen engen fachlichen Austausch mit Forschungsrichtungen.

# 1

## Einleitung und Übersicht

Kunststoffe sind genauso wie metallische Werkstoffe Konstruktionswerkstoffe, die für technisch anspruchsvolle Anwendungen eingesetzt werden. In vielen Bereichen, wie z. B. Automobilbau, Konsumgüter, Haushaltswaren und weiteren, nahezu unzähligen technischen Gebrauchsprodukten sind Kunststoffe seit vielen Jahrzehnten nicht mehr wegzudenken. Dabei sind Kunststoffe schon seit langem nicht mehr nur preiswerter Ersatz für metallische Werkstoffe, sondern erfüllen aufgrund ihres spezifischen Eigenschaftsspektrums wichtige funktionelle und konstruktive Anforderungen, wie z. B. Leichtbau, Korrosionsbeständigkeit oder weitestgehend freie Formgebungsmöglichkeiten. Auf eine noch längere Historie des industriellen Einsatzes können Elastomere zurückblicken: Bereits gegen Ende des 19. Jahrhunderts wurde das erste Auto mit Gummiluftreifen ausgestattet [SPI03]. Umso erstaunlicher ist es, dass für beide Werkstoffgruppen bis kürzlich keine verbindlichen allgemeingültigen Regelwerke oder zumindest Richtlinien für die rechnerische Auslegung der Bauteile vorlagen. Mit der VDI-Richtlinie 2016 „Festigkeitsnachweis von Bauteilen aus thermoplastischen Kunststoffen“ [VDI2016] liegt nun für die Festigkeitsbewertung von thermoplastischen Kunststoffen erstmalig ein entsprechendes Regelwerk vor, das zumindest eine überschlägige Auslegung ermöglicht. Dennoch ist für Kunststoffe der Stand der Technik nicht so weit entwickelt wie bei metallischen Werkstoffen, für die vielfältige Regelwerke (z. B. FKM-Richtlinie, ASME-Code, AD-Merkblätter) existieren. Zwar gibt es im Bereich der Materialmodellierung und des Versagensverhaltens von Kunststoffen und Elastomeren zahlreiche wissenschaftliche Untersuchungen, eine strukturierte Aufbereitung und für den Berechnungsingenieur unmittelbar anwendbare Darstellung des bereits vorhandenen Wissens fehlt häufig.

Wenn heute von rechnerischer Auslegung gesprochen wird, ist meist die Simulation des mechanischen Bauteilverhaltens mittels der Finiten-Elemente-Methode (FEM) gemeint. Aufgrund der offensichtlichen Vorteile des Verfahrens ist es aus der Produktentwicklung nicht mehr wegzudenken. Während noch vor einigen Jahrzehnten

die FEM als ein mehr oder weniger kompaktes Fachgebiet erschien, so hat sie sich zwischenzeitlich in eine Vielzahl von Unterdisziplinen aufgeteilt, die ihrerseits wiederum nur von Spezialisten mit entsprechender Spezial-Software beherrscht werden. So gibt es heute Berechnungsspezialisten, die sich beispielsweise jeweils ausschließlich mit Optimierungsverfahren, Ermüdungsfestigkeit, Crash-Berechnung, Motorberechnung, Schwingungssimulation, Kopplung von MKS und FEM, Prozess-Struktur-Kopplung etc. beschäftigen und die Aufzählung ließe sich noch erheblich erweitern. Zusätzlich zur oben angesprochenen Struktursimulation gibt es weitere Berechnungsfachgebiete, die ihrerseits wiederum Unterdisziplinen ausgebildet haben, wie die Strömungssimulation (CFD), die Prozesssimulation, die Mehrkörpersimulation (MKS), die Akustiksimulation etc. In den vergangenen Jahren ist mit der Anwendung der künstlichen Intelligenz (KI) im Bereich der Simulation ein weiterer Bereich hinzugekommen. Dieser erfordert ebenso fundierte Spezialkenntnisse zur Auswahl und Anwendung geeigneter KI-Verfahren.

Hand in Hand mit der Weiterentwicklung der Anwendungsmöglichkeiten der FEM verbesserte sich auch die Handhabbarkeit der entsprechenden Programme. Der Trend zur sogenannten „Demokratisierung“ der Simulation [HAN2017] ist ungebrochen und wird sich zukünftig eher noch verstärken. So sind heute eine Vielzahl von FEM-Programmen auf dem Markt erhältlich, mit denen sich nach verhältnismäßig kurzer Einarbeitungszeit zumindest einfache Problemstellungen berechnen lassen. Nach der Konstruktion eines beliebigen Bauteils in einem 3D-CAD-Programm kann automatisiert ein FE-Netz erzeugt und die entsprechenden Last- und Randbedingungen definiert werden. In manchen Fällen gibt ein auf diese Weise erzeugtes Modell das reale Bauteilverhalten jedoch nur schlecht wieder. Die Anwendung der FEM verlangt trotz grafischer Benutzeroberflächen ein nicht unerhebliches Maß an Verständnis für das der Berechnungsmethode zugrundeliegende Prinzip sowie für die grundlegenden Zusammenhänge der Mechanik.

Gerade weil die FEM heute ein Standardwerkzeug in der Produktentwicklung geworden ist, wird ein solches Grundverständnis dabei nicht nur vom Anwender von Simulationssoftware verlangt, sondern auch von all denen, die sich mit den Ergebnissen von FEM-Simulationen auseinandersetzen müssen. In viele Entscheidungsprozesse in der Produktentwicklung fließen Simulationsergebnisse ein, die es erforderlich machen, dass die Entscheidungsträger die gelieferten Ergebnisse kritisch hinterfragen und damit deren Zuverlässigkeit beurteilen.

Vielfach verbreitet ist die Ansicht, dass Kunststoffe und Elastomere rechnerisch gänzlich anders zu behandeln seien als metallische Werkstoffe. Diese Ansicht ist nur teilweise gerechtfertigt. Die grundlegenden Gleichungen der Kontinuumsmechanik gelten zunächst unabhängig vom betrachteten Werkstoff. Effekte wie plastische Deformationen, Verfestigung, Anisotropie und Viskoelastizität sind nicht nur bei Kunststoffen, sondern auch bei Metallen bekannt und dort auch durch Materialmodelle beschrieben. Kunststoffe besitzen natürlich im Bereich üblicher Anwendungstemperaturen im Vergleich zu Metallen geringere Steifigkeiten. Plastische Deformationen

treten bereits bei vergleichsweise geringen Beanspruchungen auf, sodass zur Beschreibung des Verformungs- und Beanspruchungsverhaltens von Kunststoffen oft werkstoffliche und geometrische Nichtlinearitäten berücksichtigt werden müssen. Die bei Metallen häufig übliche Vorgehensweise, die Beanspruchungen unter Annahme elastischen Werkstoffverhaltens am unverformten Bauteil zu berechnen, ist dann nicht mehr anwendbar. Neben der Beschreibung des Verformungs- und Beanspruchungszustands eines Bauteils ist letztendlich die Beschreibung des Versagensverhaltens von Bedeutung. Hierzu existieren aus dem Bereich der Metalle und auch der lang- und endlosfaserverstärkten Kunststoffe eine Vielzahl von Versagenshypothesen, die je nach erwarteter Versagensart (spröde oder zäh) auch für Kunststoffe verwendet werden, wenn man die spezifische Versagenscharakteristik des betrachteten Kunststoffs berücksichtigt. Was sicherlich nicht von den metallischen Werkstoffen übernommen werden kann, sind die Bemessungsgrenzen, also die Art und Höhe der Beanspruchung, wann ein werkstoffliches Versagen zu erwarten ist. Aufgrund ihrer polymeren Struktur verhalten sich Kunststoffe und Elastomere hier anders als Metalle.

Auch bei alleiniger Beschränkung auf die Struktursimulation von Kunststoffen und Elastomeren kann das hier vorliegende Buch nur einen Überblick geben und dabei auf die Besonderheiten dieser Werkstoffe eingehen. Ziel dieses Buches ist es, in kompakter und verständlicher Form eine Übersicht über bereits vorhandene Ansätze zu liefern, die sich als sinnvoll und praktikabel erwiesen haben. Die Entscheidung, die hier angebotenen Vorgehensweisen für die jeweilige spezifische Problematik zu verwenden, bleibt aber letztlich dem verantwortlichen Berechnungsingenieur überlassen.

### **Buchteil A: Werkstoffverhalten, Materialmodellierung und Bewertung**

Der Teil A des Buches umfasst die Kapitel 2 bis 5.

In Kapitel 2 wird das Materialverhalten von polymeren Werkstoffen beschrieben. Es wird hierbei auf die Effekte im Werkstoffverhalten fokussiert, die für die Berechnung polymerer Bauteile mit der FEM von Bedeutung sind. Daran anschließend werden die verschiedenen Materialmodelle vorgestellt, mit denen in der FEM das Verformungs- und Beanspruchungsverhalten von Kunststoffen bzw. Elastomeren beschrieben wird. Es wird auf die Abstimmung dieser Modelle für die verschiedenen Werkstoffe eingegangen. Desweiteren wird die Ermittlung der dazu jeweils erforderlichen Materialparameter mittels Werkstoffprüfungen diskutiert.

Kapitel 3 stellt dann den Zusammenhang zwischen den in der FEM-Simulation berechneten Beanspruchungsgrößen und dem Versagensverhalten des untersuchten Bauteils her. Diese Inhalte sind die wesentliche Grundlage für die Festigkeitsbewertung von Kunststoffbauteilen. Es werden dazu unterschiedliche Dimensionierungsansätze für thermoplastische Kunststoffe und insbesondere auch kurzfaserverstärkte Kunststoffe behandelt.

Kapitel 4 beschreibt Ansätze zur Festigkeitsbewertung von Elastomerbauteilen. Aufgrund der werkstoffspezifischen Besonderheiten dieser Werkstoffgruppe erfolgt die Darstellung in einem gesonderten Kapitel.

Das Kapitel 5 greift die für technische Anwendungen besonders relevanten kurzfaserverstärkten Spritzgussbauteile auf. Aufgrund der Orientierung der Kurzfasern durch die Schmelzebewegungen im Spritzgießprozess entsteht hier der Werkstoff mit seinen Eigenschaften erst bei der Verarbeitung. Dies bedingt eine enge Kopplung der Prozess- und Struktursimulation. Kapitel 5 beschreibt diese Kopplung, welche auch als integrative Simulation bezeichnet wird und in den letzten Jahren eine stark gewachsene Bedeutung erhalten hat.

### **Buchteil B: Vorschlag für einen vereinfachten Festigkeitsnachweis**

Im Teil B des Buches, bestehend aus Kapitel 6, wird dem Leser ein Vorschlag vorgestellt, wie thermoplastische Kunststoffbauteile anwendungs- und kunststoffgerecht auf Basis von FEM-Ergebnissen hinsichtlich ihrer Festigkeit bewertet werden können. Der Vorschlag umfasst neben dem statischen Festigkeitsnachweis als alternative Vorgehensweise zur VDI-Richtlinie auch einen vereinfachten Ermüdungsfestigkeitsnachweis.

### **Buchteil C: Einführung in die FEM**

Der dritte Teil C des Buches umfasst Kapitel 7 und 8. Dieser Teil ist nicht auf den Werkstoff ausgerichtet, sondern auf die Methode der FEM.

In Kapitel 7 werden die grundlegenden Prinzipien der Finite-Elemente-Methode erläutert und die wesentlichen Begrifflichkeiten vorgestellt. Es wird unter anderem diskutiert, wie ein FE-Modell in ein Gleichungssystem überführt wird, was Iterationen sind und was in diesem Zusammenhang die Konvergenz bedeutet. Elementtypen und Randbedingungen werden dabei ebenfalls diskutiert.

Kapitel 8 gibt eine kurze Einführung in den operativen Ablauf einer FE-Analyse. Es ist in dieser Form ausdrücklich nicht an den Berechnungsingenieur gerichtet, sondern soll vielmehr anderen am Entwicklungsprozess beteiligten Partnern einen Einblick in die Arbeit und die Probleme der Berechnungsabteilung ermöglichen. Daher sind Modellerstellung, Definition der Randbedingungen, Auswertung, Validierung und Dokumentation Themen dieses Kapitels.

### **Literatur zu Kapitel 1**

[SPI03] N. N.: Gib' Gummi Reifen-Historie, Teil 1 <http://www.spiegel.de>, 2003

[VDI2016] VDI 2016: Festigkeitsnachweis von Bauteilen aus thermoplastischen Kunststoffen – Festigkeitsnachweis gegenüber statischen Belastungen, VDI 2016 Blatt 2:2023-07 Entwurf, DIN Media GmbH, Düsseldorf, 2023

[HAN2017] Hanna, R. K.; Weinhold, I.: „The Democratization of CFD – Is It Possible?“, NAFEMS World Congress 2017, Stockholm, Sweden, Juni 2017

# **TEIL A**

**Werkstoffverhalten,  
Materialmodellierung  
und Bewertung**



# 2

## Mechanisches Werkstoffverhalten und -modellierung

Dieses Kapitel behandelt wesentliche Aspekte des mechanischen Verhaltens von Kunststoffen, die für die Struktursimulation Bedeutung haben. Im Folgenden werden daher sowohl Thermoplaste und Elastomere als auch faserverstärkte Thermoplaste behandelt. Nach einer kurzen Erläuterung wichtiger Grundbegriffe der Mechanik werden anhand eines vereinfachten Modells der molekularen Struktur von polymeren Werkstoffen die Vorgänge erläutert, die zu dem zeit- und temperaturabhängigen mechanischen Verhalten dieser Werkstoffgruppe führen. Anschließend werden die verschiedenen Möglichkeiten diskutiert, das mechanische Verhalten durch mathematische Gleichungen, den Materialgesetzen bzw. -modellen in der FEM, zu erfassen und zu beschreiben. Besondere Beachtung findet dabei die Bestimmung der Materialparameter, die in den Materialmodellen enthalten sind. Die Darstellungen beschränken sich ausschließlich auf solche Modelle, die in industriell eingesetzten FEM-Programmen üblicherweise vorhanden sind.

### 2.1 Grundbegriffe der Mechanik

#### Spannung

Die Mechanik definiert als ein Maß für die Werkstoffbeanspruchung die „Spannung“, die aus dem Quotienten aus Kraft  $F$  und Fläche  $A$  gebildet wird, auf welche die Kraft wirkt:

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (2.1)$$

Die Spannung ist damit eine flächenbezogene Last, welche den Werkstoff beansprucht. Die Spannung besitzt, genau wie die Kraft, auch einen Betrag und eine Rich-

tungsinformation und ist in einem Koordinatensystem definiert. Um den Spannungszustand an einer bestimmten Stelle eines belasteten Körpers zu beschreiben, betrachtet man ein infinitesimal kleines Element des Werkstoffes und formuliert die an den Elementflächen wirkenden Spannungen (Bild 2.1). Die senkrecht auf den Flächen stehenden Spannungen werden dabei als Normalspannungen (Symbol  $\sigma$ ), die zu den Flächen parallel-gerichteten als Schubspannungen (Symbol  $\tau$ ) bezeichnet. Für ein würfelförmiges Element sind damit bei sechs Flächen und jeweils drei Spannungskomponenten insgesamt 18 Zahlenwerte erforderlich, um den Spannungszustand zu definieren.

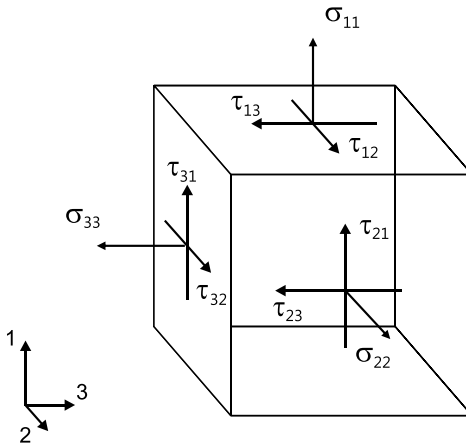


Bild 2.1

Mehraxialer Spannungszustand,  
Komponenten des Spannungstensors

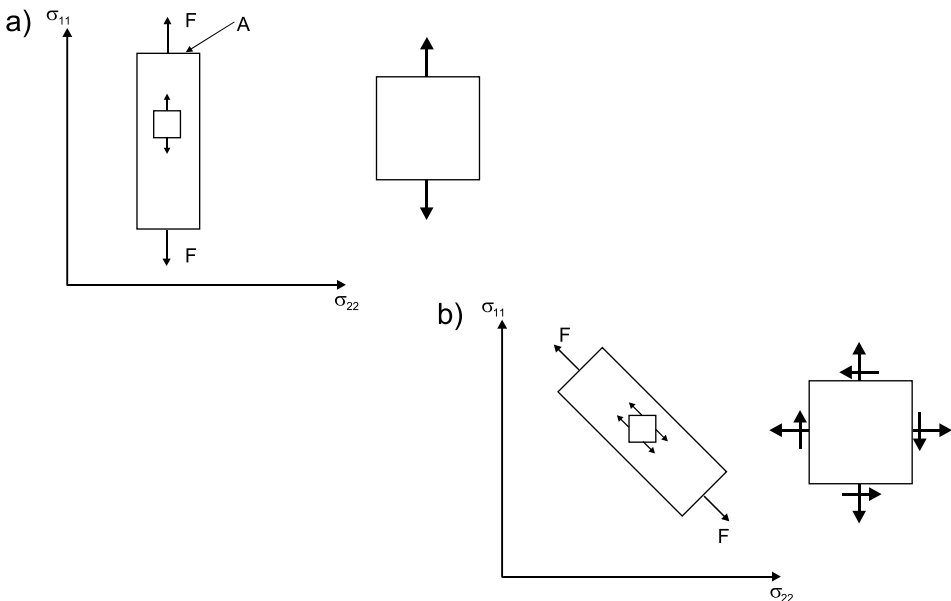
Aus dem Kräftegleichgewicht für das Element folgt, dass die jeweils gegenüberliegenden Spannungskomponenten entgegengesetzt ausgerichtet und von gleichem Betrag sein müssen. Damit reduzieren sich die erforderlichen Angaben auf neun Werte. Zusammengefasst in einer Matrix beschreiben diese neun Spannungskomponenten an jedem Punkt eines Körpers den jeweils herrschenden Spannungszustand [GHSW55].

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Diese Matrix wird als Spannungstensor bezeichnet. Der erste Index jeder der Komponenten gibt dabei die Richtung der zugehörigen Flächennormalen an, der zweite Index die Richtung der Spannungskomponente. Aus dem Momentengleichgewicht für das betrachtete Element folgt, dass die auf eine gemeinsame Kante des Elementes weisenden Schubspannungen jeweils betragsgleich sein müssen. Der Spannungszustand kann dadurch mittels sechs Komponenten vollständig beschrieben werden [BET97]:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{12} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Die Eigenschaften des Spannungstensors werden im Folgenden an einem Beispiel weiter diskutiert: Bild 2.2 zeigt einen Zugstab mit der Querschnittsfläche  $A$ , der durch eine äußere Kraft  $F$  in Längsrichtung belastet wird. Für die weiteren Überlegungen wird angenommen, dass die Kraft gleichmäßig vom Stabquerschnitt aufgenommen wird. In Bild 2.2 a) ist ein aus dem Zugstab freigeschnittenes Element dargestellt. Um die Komponenten des Spannungstensors direkt ablesen zu können, ist das Element am Koordinatensystem ausgerichtet. An diesem Element wirkt ausschließlich eine Normalspannung in die 1-Richtung des Koordinatensystems. Der Spannungstensor ergibt sich somit zu:



**Bild 2.2** Spannungskomponenten in verschiedenen Koordinatensystemen

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Der Zugstab wird nun (einschließlich der Last) um  $45^\circ$  um die  $z$ -Achse gedreht. Für den Zugstab ändert sich der Spannungszustand dadurch natürlich nicht. Wiederum wird ein Element in dem jetzt gedrehten Zugstab betrachtet, das am Koordinatensystem ausgerichtet ist (Bild 2.2 b). Die an den Elementflächen übertragenen Kräfte müs-

sen auch hier in Richtung der äußeren Kraft weisen. Die Zerlegung im gewählten Koordinatensystem ergibt somit an den Elementflächen sowohl Normal- als auch Schubspannungen. Der Spannungstensor ergibt sich damit zu:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Eine weitere Drehung des Zugstabes um die  $x$ - und/oder  $y$ -Koordinatenachsen würde zu einem Spannungstensor führen, in dem alle Komponenten ungleich null sind. Die Komponenten des Spannungstensors sind daher abhängig von der Wahl des Koordinatensystems. Ein und derselbe Spannungszustand führt in verschiedenen Koordinatensystemen somit zu unterschiedlichen Darstellungen des Spannungstensors. Wesentlich ist dabei, dass sich nur die Darstellung ändert, nicht aber der durch den Spannungstensor beschriebene Spannungszustand und die damit verknüpfte Werkstoffbeanspruchung.

### Anmerkung zum Tensorbegriff

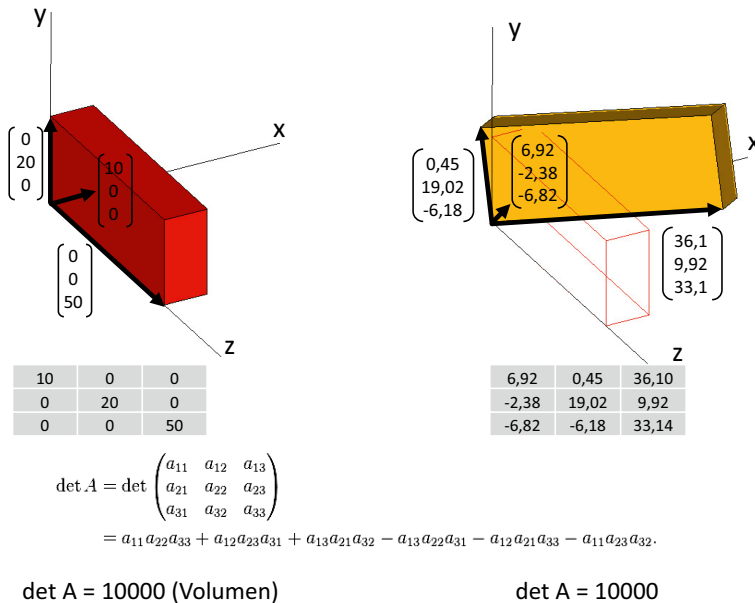
Da der Begriff des Tensors sowohl im weiteren Verlauf dieses Buches als auch bei der Auswertung von FEM-Ergebnissen von großer Bedeutung ist, soll er hier noch einmal an einem Beispiel erläutert werden. Bild 2.3 zeigt auf der linken Seite einen Quader mit den Kantenlängen 10/20/50. Er ist in einem Koordinatensystem so positioniert, dass eine Ecke im Ursprung liegt und die Kanten parallel zu den Achsen liegen. Auf diese Weise lässt sich der Quader eindeutig beschreiben, indem die Koordinaten der drei Eckpunkte auf den Achsen angegeben werden, bzw. in vektorieller Darstellung, die drei Kantenvektoren.

In einer Matrix zusammengefasst sieht der linke Quader dann so aus:

$$L = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 50 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Eine häufig verwendete Größe zur Beschreibung einer Matrix ist die Determinante. Für eine  $3 \times 3$ -Matrix gilt:

$$\begin{aligned} \det L &= \det \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 50 \end{pmatrix} \\ &= L_{11}L_{22}L_{33} + L_{12}L_{23}L_{31} + L_{13}L_{21}L_{32} - L_{13}L_{22}L_{31} - L_{12}L_{21}L_{33} - L_{11}L_{23}L_{32} \\ \det L &= 10000 \end{aligned} \quad (2.7)$$



**Bild 2.3** Erläuterungen zum Tensorbegriff

In diesem speziellen Fall entspricht der Wert der Determinante dem Volumen des Quaders.

Auf der rechten Seite des Bildes wurde der Quader im Koordinatensystem an der Ecke rotiert, die im Koordinatenursprung liegt. Die äquivalente Darstellung des Quaders als eine Matrix aus den drei Kantenvektoren sieht dann z. B. so aus:

$$R = \begin{pmatrix} 6,92 & 0,45 & 36,10 \\ -2,38 & 19,02 & 9,92 \\ -6,82 & -6,18 & 33,14 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Obwohl sich der Quader selber nicht geändert hat, lassen die beiden Matrizen zunächst keinerlei Gemeinsamkeiten erkennen. Die Determinante von  $R$  allerdings ergibt wieder das Volumen des Quaders:  $\det R = 10\,000$

Dieses Beispiel beschreibt anschaulich die wesentlichen Eigenschaften eines Tensors.

- Ein Tensor beschreibt einen bestimmten Zustand oder eine Größe in Form einer Matrix.
- Durch Veränderung der Lage dieser Größe im Koordinatensystem ändern sich die einzelnen Einträge in dieser Matrix.
- Dennoch lassen sich bestimmte Werte aus der Matrix berechnen, die sich nicht ändern und die wesentlichen Eigenschaften des beschriebenen Zustandes darstellen. Dies sind die sogenannten Invarianten.

- Ein Tensor kann stets so gedreht werden, dass charakteristische Eigenschaften des Tensors in der Matrix ablesbar sind. Dies sind die Einträge der Hauptdiagonalen, wenn alle anderen Einträge null sind. Im Beispiel hier sind es die Länge, die Höhe und die Breite.

Am Beispiel des rotierten Zugstabes in Bild 2.2 lässt sich erkennen, dass es von Vorteil sein kann, zur Beschreibung des Spannungszustands in einem Bauteil ein ganz bestimmtes Koordinatensystem zu wählen, in dem der Spannungstensor eine möglichst einfache Darstellung annimmt. So lässt sich zeigen, dass für jeden beliebigen Spannungszustand ein Koordinatensystem existiert, in dem ausschließlich die Normalspannungskomponenten auf der Hauptdiagonale des Spannungstensors besetzt sind [BET97] und alle Schubspannungen gleich null sind. In diesem Fall werden die drei Normalspannungskomponenten als Hauptnormalspannungen (oder auch Hauptspannungen) bezeichnet. Sie sind die sogenannten Eigenwerte des Spannungstensors. Das zugehörige Koordinatensystem heißt Hauptachsensystem. Durch geeignete mathematische Operationen kann jeder Spannungstensor in das Hauptachsensystem transformiert werden. Die drei Hauptnormalspannungen können auch als die Koordinaten eines (Spannungs-)Vektors im Hauptachsensystem angesehen werden, der den Kraftfluss charakterisiert. Für die später beschriebene Auswertung und Interpretation von FEM-Simulationen sind diese Zusammenhänge von Bedeutung.

Eine weitere Betrachtungsweise des Spannungstensors  $\sigma_{ij}$  hat ihren Ursprung in der experimentellen Beobachtung, dass ein hydrostatischer Druck scheinbar keinen Einfluss auf das mechanische Verhalten und insbesondere auf die Versagensgrenze von (metallischen) Werkstoffen hat. Ein Zugversuch, der z. B. in einem Ölbad unter hohem Druck durchgeführt wird, liefert nahezu dieselbe Spannungs-Dehnungskurve wie ein Zugversuch ohne eine solche Drucklast. Ausgehend von dieser Beobachtung möchte man den hydrostatischen Spannungsanteil aus einem gegebenen Spannungszustand extrahieren.

Um dies zu erreichen, verwendet man eine weitere Invariante des Tensors, die sogenannte Spur, als Summe der Diagonalelemente. Für den hydrostatischen Druckanteil eines Spannungszustandes kann man formulieren:

- Druckspannungen wirken immer normal auf die belasteten Oberflächen (nur die Diagonale des Drucktensors ist besetzt)
- Die Höhe des Drucks ist in alle Richtungen gleich groß (alle Diagonalelemente haben den gleichen Wert)

Der maximal mögliche, hydrostatische Druckanteil eines Spannungstensors muss also dieselbe Spur wie der Ausgangszustand haben und drei gleiche Einträge ( $\sigma^{\text{vol}}$ ) auf der Diagonalen aufweisen. Man bezeichnet diesen Anteil eines Spannungstensors auch als den volumetrischen Anteil, weil er nur zu einer Kompression bzw. Expansion führt, die Gestalt eines infinitesimalen Materialteilchens aber nicht verändert.